На правах рукописи

РУБЛЕВА Светлана Сергеевна

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2009

Работа выполнена в Институте математики и механики Уральского отделения Российской академии наук в отделе дифференциальных уравнений.

Научный руководитель	— кандидат физико–математических наук, доцент Вдовин Андрей Юрьевич.
Официальные оппоненты	— доктор физико–математических наук, профессор Короткий Александр Илларионович
	— доктор физико–математических наук, доцент Соловьева Ольга Эдуардовна
Ведущая организация	— ГОУ ВПО «Московский государственный университет», г. Москва.

Защита диссертации состоится "___"_______________ 2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620000, г.Екатеринбург, пр.Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Автореферат разослан "___"________________ 2009 года

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико – математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Обратные задачи динамики управляемых систем представляют собой бурно развивающуюся область современной математики. Под обратной задачей принято понимать проблему восстановления характеристик динамической системы (далее последние трактуются как управления) по имеющейся информации о функции времени, описывающей движение системы. Иными словами, требуется по результатам наблюдения, доступного измерению выхода системы — движения, восстановить недоступный измерениям вход — управление. Теория обратных задач к настоящему моменту глубоко развита по многим направлениям. Нас будет интересовать ситуация, когда динамическая система описывается конечномерными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Современное состояние проблемы решения обратных задач динамики для таких систем во многом определяется результатами, достигнутыми в области оптимального управления и теории некорректных задач.

Перечислить в автореферате сколько–нибудь полно даже значительные работы в этих областях не представляется возможным, поэтому ограничимся лишь упоминанием научных школ, в рамках которых получены наиболее значительные результаты. Прежде всего отметим школы: Л.С. Понтрягина в области математической теории оптимальных процессов управления; Н.Н. Красовского — в теории управления в игровых задачах динамики; Р. Беллмана — в развитии теории динамического программирования; Р. Калмана — в теории идентификации систем и оптимальной фильтрации.

В ряде случаев отмечается наличие непрерывной зависимости входного воздействия от выходного сигнала, однако обратные задачи зачастую этим свойством не обладают, то есть являются неустойчивыми относительно ошибок измерения. Именно в этой ситуации, для их решения используется сочетание методов теории оптимального управления и приемов из теории некорректных задач, получивших название методов регуляризации. Существенный вклад в развитие этой теории внесли отечественные школы А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева.

При наличии информации о выходе на всем временном интервале функционирования динамической системы, согласно принципу максимума Понтрягина, восстановление управления сводится к экстремальной задаче в бесконечномерном функциональном пространстве, для приближенного решения которой обычно используется конечномерная аппроксимация. При этом повышение точности метода необходимо влечет увеличение ее размерности.

В теории управления одним из способов избавиться от проблемы высокой размерности экстремальной задачи является переход к синтезу оптимальной системы по принципу управления с обратной связью, осуществляемому в реальном времени. Этот подход особенно актуален в ситуациях, когда неизвестное управление требуется восстановить в динамике, синхронно с функционированием наблюдаемой системы, как принято говорить, в темпе реального времени. Такой метод решения обратных задач динамики, названный методом динамической регуляризации, был разработан Ю.С. Осиповым и А.В.Кряжимским [1,2]. Согласно этому подходу процедура построения приближенного решения представляется в виде процесса построения управления вспомогательной системой моделью, аналогом поводыря, впервые примененным Н.Н. Красовским в теории позиционных дифференциальных игр [3]. Позднее авторы метода и их ученики А.И. Короткий, В.И. Максимов, А.В. Ким, А.Ю. Вдовин, К.Э. Ловцкий, В.Л. Розенберг и др. использовали его для решения широкого спектра обратных задач (см. источники цитированные выше, а также [4]).

Заострим внимание на одной из первых работ в этом цикле [5]. В ней рассмотрена задача моделирования управления $v(\cdot)$, порождающего движение динамической системы, которая задается дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной, с правой частью аффинной по управлению:

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_0, \tag{1}$$

здесь $g(\cdot, x(\cdot)), f(\cdot, x(\cdot))$ – непрерывные отображения $[a, b] \times R^m$ в R^m с евклидовой нормой $|\cdot|$ и в $R^{m\times q}$ со спектральной нормой $\|\cdot\|$ соответственно. Допустимыми управлениями назовем измеримые на $[a, b]$ по

Лебегу функции $v(\cdot)$ со значениями из некоторого выпуклого компакта $Q \subset R^q$, при этом $|v(t)| \leqslant M_v$. Множество всех допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$. Движение системы, порожденное допустимым управлением $v(\cdot)$, трактуется как решение задачи (1) в смысле Каратеодори. Совокупность таких движений обозначим $\mathcal{X}\big(v(\cdot)\big)$. Предполагая, что $\mathcal{X}\big(v(\cdot)\big)$ непусто для любого $v(\cdot) \in \mathcal{U}$, фиксируем непустое равномерно ограниченное множество $\mathcal{X} \subset \bigcup\limits_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathcal{X}\big(v(\cdot)\big)$. Таким образом, для некоторого компакта $\mathbf{X} \in R^m$ включение $x(t) \in \mathbf{X}$ справедливо при всех $t \in [a, b]$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}$.

Функция $\xi(\cdot) : [a, b] \to R^m$ называется измерением движения $x(\cdot)$ с уровнем погрешности h, если при $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$|\xi(t) - x(t)| \leqslant h, \tag{2}$$

Совокупность всех измерений, удовлетворяющих условию (2), обозначается $\Xi_h\big(x(\cdot)\big)$. Множество $\mathcal{U}\big(x(\cdot)\big)$ допустимых управлений, порождающих движение $x(\cdot)$, вообще говоря неодноэлементно, следовательно, задача не является корректной по Адамару. Один из приемов регуляризации в этой ситуации состоит в выборе в качестве решения управления $v_*(\cdot)$, являющегося единственным решением задачи $\min\limits_{v(\cdot)\in\mathcal{U}\left(x(\cdot)\right)} \|v(\cdot)\|_{L_2[a,b]}$.

Пусть $\mathrm{V}[a, b]$ некоторое функциональное пространство с метрикой $\rho_{\mathrm{V}}(\cdot)$, D_h — совокупность операторов $\Xi_h\big(x(\cdot)\big) \to \mathcal{U}$.

Семейство операторов D_h принято называть V нормально регуляризирующим, если для каждого $x(\cdot) \in \mathcal{X}$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\xi(\cdot)\,\in\,\Xi_h(x(\cdot))} \rho_{\mathrm{V}}\Big(D_h\big(\xi(\cdot)\big) - v_*(\cdot)\Big) = 0.$$

Суть обсуждаемого метода состоит в следующем: до момента $t = a$ считаются заданными величина $h \in R$, функции $\alpha(\cdot)$, $\Delta(\cdot) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, выпуклый компакт $Q \subset R^q$. В начальный момент $t = a$ (либо заранее) предполагаются известными вид системы (1), разбиение временного промежутка $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ $\big(\max\limits_{i\,\in\,\overline{0,n-1}}(t_{i+1} - t_i) \leqslant$

$\Delta(h)\big)$, начальное состояние модели $w_h(t_0) = \xi(t_0)$ и значение v_0, равное проекции нуля на Q.

На каждом промежутке разбиения $[t_i, t_{i+1})$ формируются:

а) значение некоторого измерения из $\Xi_h\big(x(\cdot)\big)$ в точке t_i;

б) состояние в точке t_{i+1} модели, функционирующей на $[t_i, t_{i+1}]$ по правилу

$$w_h(t) = w_h(t_i) + \Big(g(t_i, \xi(t_i)) + f(t_i, \xi(t_i))v_i\Big)(t - t_i), \tag{3}$$

б) значение v_i — результат проекции на Q вектора

$$f^T(t_i, \xi(t_i))\frac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)}$$

Определенное таким образом семейство $D_h^{(1)}$ ставит в соответствие любому измерению из $\Xi_h\big(x(\cdot)\big)$ кусочнопостоянное приближение $v_h(\cdot)$ ($v_h(t) = v_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$). Построение последнего принципиально может быть осуществлено в темпе реального времени, поэтому $D_h^{(1)}$ был назван конечношаговым динамическим алгоритмом (к.д.а).

Свойства к.д.а $D_h^{(1)}$ существенно зависят от дополнительной априорной информации. В частности, в [5] показано, что если отображения $f(\cdot, x(\cdot)), g(\cdot, x(\cdot))$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных и $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h + \Delta(h)}{\alpha(h)} = 0$, то семейство $D_h^{(1)}$ — L_2–нормально регуляризирующее.

Важным с точки зрения потребителя, предполагающего использовать для построения решения тот или иной метод, является вопрос об оценке его точности как сверху, так и снизу. Если порядок этих оценок относительно величины h одинаков, то он называется порядком точности метода. Идеальной является ситуация, когда порядок метода совпадает с порядком оптимального метода решения задачи.

Цель работы состоит в построении модификации $D_h^{(1)}$ и исследовании ее порядков точности в равномерной метрике и в пространстве $L_1[a, b]$ при дополнительной априорной информации как о свойствах самой динамической системы, так и о ее управлении.

Методы исследования. В основе теоретических результатов диссертации лежат понятия и подходы численного решения некорректных задач с помощью метода динамической регуляризации. Для получения оценок точности результатов таких решений использовались методы теории приближений, в частности, процедура восстановления значений функции с помощью сингулярного интеграла, функционального анализа, теории псевдоинверсии и вычислительной линейной алгебры, теории устойчивости и численных алгоритмов решения линейных дифференциальных уравнений. При моделировании часть расчетов для удобства проводилась в системе Matlab. Для пользователей была разработана программа в среде Microsoft Visual Studio 2005 Student Edition на языке C++.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:
— предложена модификация $D_h^{(2)}$ метода Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского моделирования управления в динамической системе, основанного на динамической регуляризации с помощью сглаживающего функционала А.Н. Тихонова правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского;
— разработан подход получения порядка точности $D_h^{(2)}$, основанный на декомпозиции, трансформирующей исходную задачу к получению оценок точности: во–первых, оператора восстановления — многомерного аналога сингулярного интеграла, во–вторых, метода Эйлера для решения линейного дифференциального уравнения с большим параметром;
— описаны множества корректности в задаче моделирования управления;
— на указанных множествах получены верхняя и нижняя оценки точности для равномерной и $L_1[a, b]$ метрик, их асимптотический порядок, в первом случае совпадающий с оптимальным;
— на основе проведенных теоретических исследований разработаны программные средства для численного моделирования, которые были применены для построения математической модели вибропроцессов, возникающих в механической системе с двумя степенями свободы.

Теоретическая и практическая ценность. Решение обратных задач возникает в различных ситуациях при изучении явлений в науке и технике. Говоря о целесообразности использования при их решении динамического подхода, уместно вспомнить слова Н.С. Бахвалова [6]: «Если исследования не будут завершены к сроку, то решение все равно будет принято, но на основании более грубого, эмпирического или просто "волевого" подхода .... В такой ситуации лучше найти удовлетворительное решение задачи, но в срок, чем полное решение задачи к тому времени, когда оно станет бесполезным». Именно поэтому, построение динамического алгоритима с уменьшением количества операций, выполняемых на его шаге, можно считать практически ценным. С другой стороны, результаты работы свидетельствуют о том, что в ряде случаев асимптотический порядок точности методов динамической регуляризации сопоставим с порядком точности статических методов, которые обладают существенными информационными преимуществами. Этот факт, основанный, по всей вероятности, на том, что основные свойства решаемой задачи обусловлены ее локальными характеристиками, несомненно интересен с точки зрения теории.

Апробация работы. Главные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: конференции–семинаре "Теория управления и математическое моделирование", посвященной 50-летию Ижевского математического семинара и 30-летию кафедры "Прикладная математика и информатика" Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 31 января – 4 февраля 2006), Международном научном семинаре "Устойчивость, управление и моделирование динамических систем", посвященном 75-летию со дня рождения И.Я.Каца, (Екатеринбург: УрГУПС, 13 – 17 ноября 2006), Воронежской зимней математической школе – 2008, посвященной 90-летию Воронежского государственного университета, 90-летию С. Г. Крейна (Воронеж, 24–30 января 2008), конференции–семинаре "Теория управления и математическое моделирование", посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева (Ижевск, 4 – 9 мая 2008), Международной конференции, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 17 – 22 июня 2008), Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова

(Екатеринбург, 1-6 сентября 2008 года), 3–й Международной конференции “Информационно–математические технологии в экономике, технике и образовании” (Екатеринбург, УГТУ-УПИ, 20 – 22 ноября 2008), семинаре научно – педагогической школы “Виброакустические процессы в технологиях, оборудовании и сооружениях отраслей ЛПК” (Екатеринбург, 3–4 февраля 2009); ежегодных конференциях молодых ученых в ИММ УрО РАН в 2005 –2008 гг., научных семинарах кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета (руководитель д.ф.-м.н В.Г. Пименов), расширенном семинаре отдела дифференциальных уравнений ИММ УрО РАН (руководитель д.ф.-м.н В.И. Максимов), научно-методическом семинаре кафедры высшей математики УГЛТУ (руководитель доцент Т.И. Шатунова).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах, приведенных в конце автореферата, три из них в изданиях, включенных в перечень ВАК. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, А.Ю. Вдовиным осуществлялись постановка задач и выбор методов их исследования, а диссертантом – непосредственное доказательство основных теоретических результатов, проведение вычислительных экспериментов и разработка соответствующих программных средств.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, списка литературы, включающего 118 названий, и приложения. Общий объем работы составляет 132 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается значение метода динамической регуляризации при решении обратных задач динамики управляемых систем, обсуждается его место среди иных методов, разработанных для этих целей. Для семейства операторов D_h в пространстве $\mathrm{V}[a,b]$ подчеркивается важность получения верхней (нижней) оценок его точности. Под нижней (верхней) оценкой точности понимаются функции $\nu_1(\cdot)(\nu_2(\cdot)) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, удовлетворяющих для $h \in (0, h_*]$ и движений $x(\cdot) \in \mathfrak{X}$ из множества корректности неравенствам

$$\nu_1(h) \leqslant \sup_{\xi(\cdot)\in\Xi_h\left(x(\cdot)\right)} \|v_*(\cdot) - D_h\big(\xi(\cdot)\big)\|_{\mathrm{V}[a,b]} \leqslant \nu_2(h);$$

их порядком — функции $\gamma_i(h) : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$C_1 h^{\gamma_1(h)} \leqslant \nu_1(h) \leqslant \nu_2(h) \leqslant C_2 h^{\gamma_2(h)};$$

и асимптотическим порядком — число $r = \lim\limits_{h\to 0}\gamma_1(h) = \lim\limits_{h\to 0}\gamma_2(h)$. Рассматриваютя условия, налагаемые на систему (1), ее движения со значениями из компакта $\mathbf{X} \subset R^m$, и управления $v(\cdot)$, при выполнении которых возможно получение оценок точности и асимптотического порядка:

условие $x1$ — $x(t) \in int\mathbf{X}$ для всех $t \in [a,b]$;

условие $s1$ — отображения $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица на $[a,b] \times \mathbf{X}$ с константой L;

условие $f1$ — матрица $f(\cdot, x(\cdot))$ обратима на $[a,b]$;

условие $f2$ — образ матрицы $f(\cdot, x(\cdot))$ - $R_1\big(f(\cdot, x(\cdot))\big)$ постоянен на $[a,b]$;

условие $f3$ — $rank\big(f(\cdot, x(\cdot))\big)$ постоянен на $[a,b]$;

условие $v1$ — вариация $v_*(\cdot)$ на $[a,b]$ $\Big(\bigvee\limits_a^b v_*(\cdot)\Big)$ ограничена;

условие $v2$ —$v_*(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, и известно $v_*(a)$;

условие $v3$ — $v_*(t) \in intQ$ для всех $t \in [a,b]$.

Предлагается модификация $D_h^{(2)}$, рассмотренного семейства $D_h^{(1)}$, суть которой состоит в отказе от процедуры проектирования на Q при определении значения v_i. Очевидно, что это приводит к уменьшению числа арифметических операций, выполняемых на шаге метода, и соответственно улучшает динамические свойства алгоритма.

В первой главе $D_h^{(2)}$ рассматривается при условиях $m = q = 1$, $f(\cdot, x(\cdot)) \equiv 1$, $g(\cdot, x(\cdot)) \equiv 0$, сводящих задачу (1) к проблеме численного дифференцирования. На ее примере исследуется предлагаемый подход к получению оценок точности. Помимо возникающей на i–м промежутке при реализации $D_h^{(2)}$ модели $w_h(t) = w_h(t_i) + v_i\,(t - t_i)$ с управлением

$v_i = \dfrac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)}$, рассматривается модель

$$w_0'(t) = \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)},$$

которая, равно, как и управление $v_0(t) = \dfrac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)}$, реально реализованы быть не могут, поэтому названы виртуальными. При этом виртуальное управление определяется формулой

$$v_0(t) = \frac{1}{\alpha(h)} \int\limits_a^t e^{-\frac{t-\tau}{\alpha(h)}} v(\tau) d\tau,$$

правая часть которой может трактоваться как сингулярный интеграл [7] с ядром $\dfrac{1}{\alpha(h)} e^{-\frac{t-\tau}{\alpha(h)}}$. С помощью приемов, принятых при его исследовании, доказана

Лемма 1.1 *Пусть выполены условия* $x1$, $v1$, $v3$; $\delta(h), \dfrac{\alpha(h)}{\delta(h)}$ *стремятся к нулю вместе с* h; $0 \in Q$; $k \in \mathbb{N}$. *Тогда найдется* $h_1(k) > 0$ *такое, что для всех* $h \in (0, h_1(k))$, $t \in [a, b]$ *справедлива оценка*

$$|v_0(t) - v(t)| \leqslant 3M_v \left(\frac{\alpha(h)}{\delta(h)}\right)^k + \bigvee_{t-\delta(h)}^{t} v(\cdot).$$

Рассмотрение модели в $D_h^{(2)}$ как реализации метода Эйлера для виртуальной модели, описываемой линейным дифференциальным уравнением, позволяет установить тот факт, что справедлива

Лемма 1.4 *Пусть выполнены условия леммы* 1.1, *функции* $\alpha(\cdot)$, $\Delta(\cdot)$ *и величина* $h_2 > 0$ *таковы, что при* $h \in (0, h_2)$ $\dfrac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}$ *равномерно ограничена. Тогда найдется положительная константа* K_1 *такая, что для всех* $t \in [a, b]$ *имеет место неравенство*

$$|v_0(t) - v_h(t)| \leqslant 3\frac{h}{\alpha(h)} + \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} K_1.$$

Подчеркнем, что указанные в диссертационной работе в явном виде постоянные K_i, зависят только от коэффициентов Липшица и ограничивающих констант. Номер i соответствует лишь порядковому номеру появления константы в автореферате.

Полученные результаты доказывают справедливость следующего факта

Теорема 1.1 *Пусть выполнены условия лемм* 1.1, 1.4. *Тогда*

$$\|v(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_1} \leqslant 3M_v \left(\frac{\alpha(h)}{\delta(h)}\right)^k (b-a) + 3(b-a)\frac{h}{\alpha(h)} + \\ + \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} K_1(b-a) + \delta(h) \bigvee_a^b v(\cdot).$$

Во втором разделе изучается вопрос о нижней оценке точности $D_h^{(2)}$ в $L_1[a,b]$ для задачи численного дифференцирования. Следуя подходу [8], рассматривается правило формирования ошибки измерения и пример управления, которые гарантируют, что имеет место

Теорема 1.2 *Пусть* $x'(t) = v_*$, $x(a) = x_0$, *где* $v_* \neq 0$ *— внутренняя точка* Q*;* $\alpha(h)$, $\dfrac{h}{\alpha(h)} \to 0$ *вместе с* h, $\Delta(h) = h$. *Тогда существуют постоянные* h_3, $K_2 > 0$ *такие, что при* $h \in (0, h_3)$ *нижняя оценка точности* $D_h^{(2)}$ *для задачи численного дифференцирования удовлетворяет неравенству:*

$$\sup_{\xi(\cdot) \in \Xi_h(x(\cdot))} \|v_* - v_h(\cdot)\|_{L_1} \geqslant K_2\sqrt{h}.$$

На основании этих результатов делается вывод о том, что при выборе параметров метода по правилу $\Delta(h) = h$, $\delta(h) = \alpha^{\frac{k}{k+1}}(h)$, $\alpha(h) = h^{\frac{k+1}{2k+1}}$ асимптотический порядок точности $D_h^{(2)}$ в $L_1[a,b]$ равен $\dfrac{1}{2}$.

В разделе 1.3 $D_h^{(2)}$ реализуется на модельном примере, при этом полностью подтверждаются полученные ранее теоретические выводы.

Завершается первая глава рассмотрением примера использования к.д.а $D_h^{(2)}$ для решения задачи определения скорости изменения электросопротивления монокристалла от температуры, возникающей при изучении явления высокотемпературной сверхпроводимости.

Следующие, **вторая и третья главы,** посвящены получению оценок точности виртуального управления при различных ограничениях, налагаемых на систему (1) и управление $v_*(\cdot)$. При этом виртуальные модель и управление принимают вид:

$$w_0'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v_0(t), \quad w_0(a) = x_0, \tag{4}$$
$$v_0(t) = f^T(t, x(t))\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)}.$$

Как и в главе 1, движение виртуальной модели может быть представлено в явном виде

$$w_0(t) = \mathcal{K}(t, a; A(\cdot))x_0 + \int\limits_a^t \mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)\big(\frac{1}{\alpha(h)}A(\tau, x(\tau))x(\tau) + \\ + g(\tau, x(\tau))\big)d\tau,$$

где $A\big(\tau, x(\tau)\big) = f(\tau, x(\tau))f^T(\tau, x(\tau))$, а $\mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)$ — матрица Коши системы (4).

Преобразования полученного решения при выполнении условия $f1$ приводят к равенству

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)}\int\limits_a^t \mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)A(\tau, x(\tau))\left(f^T(\tau, x(\tau))\right)^{-1} v(\tau)d\tau.$$

С учетом свойств матрицы Коши, интегральный оператор в правой части может быть рассмотрен как обобщение сингулярного интеграла, рассмотренного в первой главе. Будем трактовать его как оператор восстановления значения функции $F(t) = \left(f^T\big(t, x(t)\big)\right)^{-1} v(t)$ с ядром $\Phi_h(t, \tau) = \dfrac{\partial}{\partial \tau}\Big(\mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)\Big)$.

Если при $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$ функция $\mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)$ удовлетворяет неравенству $\|\mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big)\| \leqslant \gamma e^{-\nu(t-\tau)}$, то говорят о выполнении свойства $\mathcal{B}(\nu, \gamma)$ [9].

В **лемме 2.3** доказано, что при выполнении условий $s1$, $f1$, $v1$, $v3$, $0 \in Q$, матрица Коши $\mathcal{K}\big(t, \cdot; A(\cdot)\big)$ удовлетворяет свойству $\mathcal{B}(\dfrac{\lambda}{\alpha(h)}, \sqrt{m})$, где $\lambda = \min\limits_{\tau \in [a,t]} \{\lambda_1(\tau)\}$, а $\lambda_1(\tau)$ — минимальное собственное число $A(\tau, x(\tau))$. При этих же условиях, на основании справедливости неравенства [10]

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}, \tag{5}$$

устанавливается, что $\bigvee\limits_a^b F(\cdot)$ ограничена. Этот факт, а также свойство $\mathcal{B}(\dfrac{\lambda}{\alpha(h)}, \sqrt{m})$ матрицы Коши, позволяют оценить погрешность оператора восстановления:

Лемма 2.6 Пусть выполнены условия $s1$, $f1$, $v1$, $v3$, $0 \in Q$; функция $\delta(\cdot) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такова, что $\delta(h)$, $\dfrac{\alpha(h)}{\delta(h)} \to 0$ при $h \to 0$; при $\tau \in [a - \delta(h), a)$ $A\big(\tau, x(\tau)\big) \equiv A\big(a, x(a)\big)$, $v(\tau) \equiv 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют положительные константы K_3, K_4 и $h_4(k)$ такие, что для всех $h \in (0, h_4(k))$, $t \in [a, b]$ справедлива оценка:

$$\left| \int\limits_a^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Big(\mathcal{K}\big(t, \tau; A(\cdot)\big) \Big) F(\tau) d\tau - F(t) \right| \leqslant K_3 \left(\frac{\alpha(h)}{\lambda \delta(h)} \right)^k + K_4 \bigvee_{t - \delta(h)}^{t} F(\cdot).$$

Итогом раздела 1 главы 2 является теорема о точности виртуального управления при условии обратимости матрицы $f(\cdot, x(\cdot))$ на $[a, b]$, последнее гарантирует одноэлементность множества $\mathcal{U}\big(x(\cdot)\big)$:

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия леммы* 2.6. *Тогда существуют положительные константы* K_5, K_6 *такие, что*

$$\|v(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_1} \leqslant K_5 \left(\frac{\alpha(h)}{\lambda \delta(h)} \right)^k (b - a) + \delta(h) K_6 \bigvee_a^b \left(f^T(\cdot, x(\cdot)) \right)^{-1} v(\cdot). \tag{6}$$

В разделе 2 главы 2 рассматривается случай выполнения условий $x1$, $s1$, $f2$, $v1$, $v3$. При этом полагаем $f(\cdot, x(\cdot))$ вырожденной при $t \in [a, b]$, так как иной случай рассмотрен ранее. В этой ситуации, действуя по аналогии с предыдущим разделом, приходим к использованию операции псевдообращения, которая приводит к рассмотрению оператора восстановления вида

$$\frac{x(t)-w_0(t)}{\alpha(h)}=\int\limits_a^t \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\mathcal{K}_1\big(t,\tau;A(\cdot)\big)\Big)\left(f^T(\tau,x(\tau))\right)^+ v(\tau)d\tau,$$

здесь $\mathcal{K}_1\big(t,\tau;A(\cdot)\big)=\mathcal{K}\big(t,\tau;A(\cdot)\big)P_1$, а P_1 — проектор на постоянное по t подпространство $R_1\big(A(t,x(t)\big)$.

В **лемме 2.8,** являющейся аналогом леммы 2.3, устанавливается свойство $\mathcal{B}\big(\frac{\lambda}{\alpha(h)},\sqrt{m}\big)$ для матрицы $\mathcal{K}_1\big(t,\tau;A(\cdot)\big)$, где λ — точная нижняя граница минимальных положительных собственных значений $A(t,x(t))$ при $t\in[a,b]$.

Ввиду имеющего место обобщения неравенства (5) (см. [11]) на случай псевдообратной матрицы, имеет место ограниченность вариации $\big(f^T(\cdot,x(\cdot))\big)^+ v_*(\cdot)$ на $[a,b]$. Поэтому оценка точности оператора восстановления с ядром $\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\mathcal{K}_1\big(t,\tau;A(\cdot)\big)\Big)$ этой функции принимает вид, аналогичный (6) с заменой обратной матрицы на псевдообратную, а $v(t)$ на $v_*(t)$.

В третьей главе диссертации удается перенести результаты второго раздела предыдущей главы на ситуацию, когда условие $f2$ заменяется условием $f3$, то есть на случай, когда подпространство образов матрицы $f(\cdot,x(\cdot))$, меняясь во времени, сохраняет постоянную размерность.

В лемме 3.4 устанавливается, что функция

$$P_1(A(t,x(t)))\mathcal{K}\big(t,\tau;A(\cdot)\big)P_1(A(\tau,x(\tau)))$$

обладает свойством $\mathcal{B}(\frac{\lambda}{4\alpha(h)},4\sqrt{m}K_U)$, где λ, как и в лемме 2.8, — точная нижняя граница минимальных положительных собственных значений $A(t,x(t))$ при $t\in[a,b]$. Схема доказательства этого не очевидного, но принципиально важного для нас результата состоит в следующем: в силу свойств ортогональных проекторов $P_k\big(A(t,x(t))\big)$, $k=0,1$ существует ограниченный обратимый оператор поворота $U(\tau,t)$ [12]

($\max\limits_{t,\tau} \|U^{-1}(\tau,t)\| \leqslant K_U$), при помощи которого вводится в рассмотрение матрица–функция $Z(t,\tau) = \mathcal{K}\big(t,\tau; A(\cdot)\big)U(\tau,t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения с большим параметром:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(Z(t,\tau)\Big) = \frac{1}{\alpha(h)} Z(t,\tau)A_1(\tau,x(\tau);t)+$$
$$+Z(t,\tau)U^{-1}(\tau,t)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(U(\tau,t)\Big), \qquad Z(t,t)=E \tag{7}$$

где матрица – коэффициент $A_1(\tau,x(\tau);t)$ коммутирует с проекторами.

Рассматривая $A_2(\tau,x(\tau);t) = A_1(\tau,x(\tau);t) - \alpha(h)E$, собственные числа которой при малых h отличны от нуля, и, переходя к “медленному” времени $s = \dfrac{t-\tau}{\alpha(h)}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(Z\big(t,t-\alpha(h)s\big)\Big) = -Z\big(t,t-\alpha(h)s\big)A_2\big(t-\alpha(h)s, x(t-\alpha(h)s);t\big) -$$
$$-\alpha(h)Z\big(t,t-\alpha(h)s\big)B\big(t,t-\alpha(h)s\big), \quad Z(t,t)=E, \tag{8}$$

где $B\big(t,t-\alpha(h)s\big) = U^{-1}(\tau,t)\dfrac{\partial}{\partial\tau}\Big(U(\tau,t)\Big) + E$.

Отбрасывая второе слагаемое в правой части (8), приходим к “усеченному” уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\widetilde{Z}\big(t,t-\alpha(h)s\big)\Big) = -\widetilde{Z}\big(t,t-\alpha(h)s\big)A_2\big(t-\alpha(h)s, x(t-\alpha(h)s);t\big),$$

которое будучи рассмотренным для столбцов $\widetilde{Z}^{[k]}(t,\cdot)$ матрицы $\widetilde{Z}(t,\cdot)$ распадается на систему независимых уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\widetilde{Z}_i^{[k]}(t,t-\alpha(h)s)\Big) = -A_2\big(t-\alpha(h)s, x(t-\alpha(h)s);t\big)\widetilde{Z}_i^{[k]}(t,t-\alpha(h)s),$$

с начальными условиями $\widetilde{Z}_i^{[k]}(t,t) = P_i^{[k]}(A(t,x(t)))$.

При этом в **лемме 3.2** доказывается, что для решений “усеченных” уравнений при малых значениях h имеют место оценки $|\widetilde{Z_1}^{[k]}(t,t-\alpha(h)s)| \leqslant |\widetilde{Z_1}^{[k]}(t,t)|e^{-\frac{\lambda}{2}s}$, $|\widetilde{Z_0}^{[k]}(t,t-\alpha(h)s)| \geqslant |\widetilde{Z_0}^{[k]}(t,t)|e^{\frac{\alpha(h)}{2}s}$.

Уравнения, обладающие такими свойствами, называются э–дихотомичными [9]. Методы, изложенные в цитированной монографии, позволяют при малых h гарантировать наличие условий э–дихотомии и для уравнения (8), рассмотренного для столбцов матрицы $Z(t,\cdot)$, и являющегося возмущенным по отношению к “усеченному.” При этом

$$\left|Z_1^{[k]}(t,t-\alpha(h)s)\right| = \left|P_1(A(t,x(t)))Z^{[k]}(t,t-\alpha(h)s)\right| \leqslant 4e^{-\frac{\lambda}{4}s}.$$

Переходя к оценке спектральной нормы матрицы, получаем окончательный результат, который позволяет оценить погрешность оператора восстановления с ядром $\Phi_h(t,\tau) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\Big(P_1(A(t,x(t)))\mathcal{K}\big(t,\tau;A(\cdot)\big)P_1(A(\tau,x(\tau)))\Big)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $F_+(\cdot) = \big(f^T(\cdot,x(\cdot))\big)^+ v(\cdot)$; *выполнены условия* $s1$, $v1$, $v3$, $f3$, $0\in Q$; $\delta(h)$, $\dfrac{\delta(h)}{\alpha(h)}$ *стремятся к нулю вместе с* h; *при* $\tau\in[a-\delta(h),a)$ $v(\tau)\equiv 0$, $A\big(\tau,x(\tau)\big)\equiv A\big(a,x(a)\big)$; $k\in\mathbb{N}$. *Тогда существуют положительные константы* $h_5(k), K_7$ K_8 *такие, что при* $h\in(0,h_5(k))$, $t\in[a,b]$

$$\left|\int\limits_a^t \Phi_h(t,\tau)F_+(\tau)d\tau - F_+(t)\right| \leqslant K_7\bigvee_{t-\delta(h)}^{t} F_+(\cdot) + K_8\left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)}\right)^k.$$

Итогом третьей главы является

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.5. *Тогда*

$$\|v_*(\cdot)-v_0(\cdot)\|_{L_1} \leqslant K_8\left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)}\right)^k(b-a)+ \tag{9}$$
$$+\delta(h)K_9\bigvee_a^b\big(f^T(\cdot)\big)^+v(\cdot)+\alpha(h)K_{10}(b-a)$$

Четвертая глава посвящена получению оценки точности метода Эйлера, примененного к виртуальной системе модели на сетке разбиения $[a,b]$, задаваемой к.д.а $D_h^{(2)}$. Рассуждения проводятся по той же схеме, что и в первой главе: в два этапа. На первом, в **лемме 4.4** гарантируется существование констант K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14} таких, что

$$|v_h(t)-v_0(t)| \leqslant \frac{h}{\alpha^2(h)}K_{11} + \frac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}K_{12} + K_{13}\frac{h}{\alpha(h)} + K_{14}\frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}.$$

Из полученной оценки непосредственно следует результат **теоремы 4.1:** *Пусть выполнены условия леммы* 4.4. *Тогда найдутся положительные константы* K_{15}, K_{16} *такие, что*

$$\|v_h(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_1} \leqslant \frac{h}{\alpha^2(h)}K_{15} + \frac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}K_{16}.$$

На втором этапе оценка уточняется при условии ограниченности величин $\dfrac{h}{\alpha^2(h)}$, $\dfrac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}$, за счет использования свойств линейного уравнения, при этом, окончательный результат представим в виде оценки, указанной в **теореме 4.2**:

$$\|v_0(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_1} \leqslant \frac{h}{\alpha(h)}K_{17} + \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}K_{18}$$

Пятая глава является заключительной. В ней на основании оценок точности виртуального управления и метода Эйлера выводятся итоговые оценки точности к.д.а $D_h^{(2)}$.

В первом разделе результаты относительно точности к.д.а $D_h^{(2)}$в метрике $L_1[a,b]$ на различных классах корректности, построенных в главах 2, 3, 4, сформулированы в виде **теорем 5.1, 5.3, 5.4:**

Теорема 5.1 *Пусть выполнены условия* $x1$, $s1$, $f1$, $v1$, $v3$, $0 \in Q$, $\delta_1(h) = \lambda\delta(h)$; *существует* $h_6 > 0$ *такое, что для всех* $h \in (0, h_6)$ $\dfrac{h}{\alpha^2(h)}$, $\dfrac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}$ *ограничены. Тогда найдутся положительные константы* K_{19}, K_{20} *такие, что верхняя оценка точности* $D_h^{(2)}$ *в пространстве* $L_1[a,b]$ *имеет вид:*

$$\nu_2(h) \leqslant K_{19}\Big(\frac{\alpha(h)}{\delta_1(h)}\Big)^k + K_{20}\delta_1(h)\bigvee_a^b \left(f^T(\cdot)\right)^{-1} v(\cdot) + \frac{h}{\alpha(h)}K_{17} + \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}K_{18}$$

Замечание 1. В рассматриваемом случае при выборе параметров регуляризации $\delta_1(h) = \alpha(h)^{\frac{k}{k+1}}$, $\alpha(h) = h^{\frac{k+1}{2k+1}}$, $\Delta(h) = h$, асимптотический порядок точности $D_h^{(2)}$равен $\dfrac{1}{2}$.

Показывается, что такой же порядок точности имеет место при ограниченности величин $\dfrac{h}{\alpha^2(h)}$, $\dfrac{\Delta(h)}{\alpha^2(h)}$ и выполнении: а) условий $x1$, $s1$, $f2$,

$v1$, $v3$ (теорема 5.3); б) условий $x1$, $s1$, $f3$, $v1$, $v3$ (теорема 5.4).

Замечание 2. Полученный порядок точности является неулучшаемым.

В **теореме 5.2** в равномерной метрике рассматривается асимптотический порядок точности к.д.а $D_h^{(2)}$, примененного к системе (1) при закрепленном левом конце управления ($v(a) = v_a$) и выполнении условий $v2$, $f1$, $x1$, $s1$, $v1$. Показывается, что при выборе параметров регуляризации, рекомендуемом в замечании 1, этот порядок равен $\dfrac{1}{2}$.

Замечание 1. При замене в теореме 5.2 условия $f1$ на $f3$, результат остается справедивым, но уже для нового нормального управления $v_*(\cdot) - P_1\big(A(\cdot, x(\cdot))\big)v(a)$.

Замечание 2. Указанный порядок является асимптотически оптимальным.

Замечание 3. Полученные в разделе 5.1 относительно асимптотического порядка точности к.д.а $D_h^{(2)}$результаты остаются справедливыми и для к.д.а $D_h^{(1)}$ в случае выполнения условий $x1$, $v1$, $v3$.

В этом же разделе подводятся итоги моделирования управления с использованием к.д.а $D_h^{(2)}$с помощью разработанного программного комплекса. Они полностью согласуются с результатами, полученными аналитически.

В разделе 5.2 приводится сравнение применения к.д.а $D_h^{(2)}$и других методов. При этом отмечается его преимущество, достигаемое за счет действия на интервалах непрерывности восстанавливаемого управления, на которые он наиболее заострен.

Раздел 5.3 посвящен использованию к.д.а. $D_h^{(2)}$для решения задачи моделирования системы с двумя степенями свободы на примере сосредоточенной массы на упругом основании, совершающем поступательные и поворотные перемещения в одной плоскости. Задачи в такой постановке возникают при решении проблем виброзащиты при проектировании и эксплуатации машин, оборудования и сооружений. В работе с помощью к.д.а $D_h^{(2)}$определяется характер неизвестных неупругих сил, воздействующих на систему.

В **приложении** приводятся иллюстрации пользовательского интерфейса и описание программных средств, предназначенных для численного моделирования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions London Gordon and Breach, 1995.

2. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П, Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации М.: МГУ, 1999.

3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

4. Короткий А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Известия вузов. Математика. 1995. №11. С.101-123.

5. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе. // Техн. Кибернетика. Изв. АН СССР, 1983. № 2, с. 51–60

6. Бахвалов Н.С. Численные методы. I. М. Наука 1973.

7. Натансон И.П. Теория функции вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

8. Вдовин А.Ю., Кряжимский А.В. О нижней оценке точности одного метода позиционной регуляризации для задачи восстановления возмущения // В сб.: Задачи моделирования и оптимизации. Свердловск: УрО АН СССР, 1991, с.3-13

9. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве М.: Наука, 1970.

10. Воеводин В.В. Линейная алгебра: Учебное пособие. СПб.: Издательство "Лань,"2006.

11. Wedin P. A. Pertubation theory for pseudoinverces. // BIT № 13(2), 1973. с. 217–232.

12. Далецкий Ю. Л., О непрерывном вращении подпространств в

банаховом пространстве. // УМН 1957, 12 3(75) с. 147–154.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих резенцируемых научных журналах:

1. Рублева С.С. О модификации одного динамического алгоритма, гарантирующего восстановление управления в динамической системе с вырожденной матрицей// **Вестник Удмуртского университета, Математика. Механика. Компьютерные науки.** Вып. 2, 2008, с. 119-121

2. Вдовин А.Ю. Ким А.В. Рублева С.С. Об асимптотической точности в L1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения.// **Труды Института математики и механики.** Том 12, №2. Управление, устойчивость и обратные задачи динамики, 2006, с.18-26 5.

2.a Vdovin A. Yu., Kim A.V., Rubleva S.S. On asymptotic accuracy in L1 of one dynamical algorithm for reconstructing a disturbance // **Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics**, Volume 255, Suppl 21, 2006, 216 -224

3. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О точности реконструкции линейного воздействия на динамическую систему по результатам неточных измерений ее состояний// **Вестник Московского государственного университета леса - Лесной вестник.** №3(60), 2008, с.189-191.

Другие публикации:

4. Вдовин А.Ю. Рублева С.С. О динамическом алгоритме нахождения производной функции.// Известия высших учебных заведений: Лесной журнал. 2006, № 1,с.128-132

5. Вдовин А.Ю. Рублева С.С. О динамическом алгоритме нахождения производной по кусочнопостоянной информации о ней. // Известия института математики и информатики, Удмуртский государственный университет, выпуск 2 (36), 2006, с.31-34

6. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. Асимптотическая оценка точности восстановления возмущения одного динамического алгоритма // Устойчи-

вость, управление и моделирование динамических систем: Сб. научн. Трудов. Материалы научн. конферении, посвященной 75-летию со дня рождения И.Я.Каца, Екатеринбург: УрГУПС, № 54 (137), 2006, с.34

7. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О гарантированной оценке точности динамического восстановления управления (случай непостоянства ранга матрицы коэффициентов) // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2008, Воронеж: ВорГУ, 2008, с. 54-68

Подписано в печать .04.2009 г. Объем 1 п.л. Заказ № 167 Тираж 100 экз.
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37.
Уральский государственный лесотехнический университет
Отдел оперативной полиграфии